NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 35, septiembre de 1998, páginas 11-15

Nota sobre los números complejos en el Bachillerato

Cástor Molina Iglesias

Introducción

Los números complejos se explican en Bachillerato por motivos pedagógicos, culturales y propedéuticos; su utilidad en las propias Matemáticas y en las aplicaciones es incuestionable.

Abstract

This note propose a geometrical view point about the learning of the complex numbers which is based on the geometrical interpretation of the sum (translation) and the product (homothety or dilation) of numbers in the line and their extension to the plane.

El enfoque usual en la didáctica de los números complejos usada en los textos es pseudohistórico: la resolución de ecuaciones cuadráticas con discriminante negativo lleva a la utilización de los números imaginarios $a + b\sqrt{-1}$, sin comprender aún su significado y la representación gráfica de éstos, a la definición por Gauss de los números complejos (a, b) y a sus diversas formas de representación (cartesiana, binómica, polar y trigonométrica). Se comienza por su planteamiento aritmético y se sigue con su interpretación geométrica. El enfoque inicial aritmético o algebraico (extensión cuadrática de un cuerpo) es abstracto y aunque la mecánica de las operaciones binómicas no es complicada, la utilización desde el principio de la *imaginaria* $\sqrt{-1}$ tiene una connotación esotérica (ver el comienzo de la pág. 54 de [3]) que si bien puede inspirar curiosidad a unos, por contra, puede tal vez intranquilizar a otros que se cuestionen la «seriedad» de las matemáticas.

El objeto de este artículo es proponer un punto de vista inicial geométrico para introducir los números complejos sin recurrir a nada *imaginario* y más motivador que una árida definición gaussiana axiomática que no justifique la fórmula del producto. Por otro lado con este enfoque las mayoría de las propiedades del producto (conmutatividad, asociatividad, ...) se demuestran más fácilmente.

Transformaciones geométricas en la recta

Todo número real b define una trasformación de la recta en sí misma, denominada *traslación*, mediante la suma :

$$x \mapsto x' = x + b$$

Del mismo modo, todo número real $a \neq 0$ define una transformación de la recta en sí misma, denominada *homotecia* o *dilatación*, mediante el producto :

$$x \mapsto x' = a\,x$$

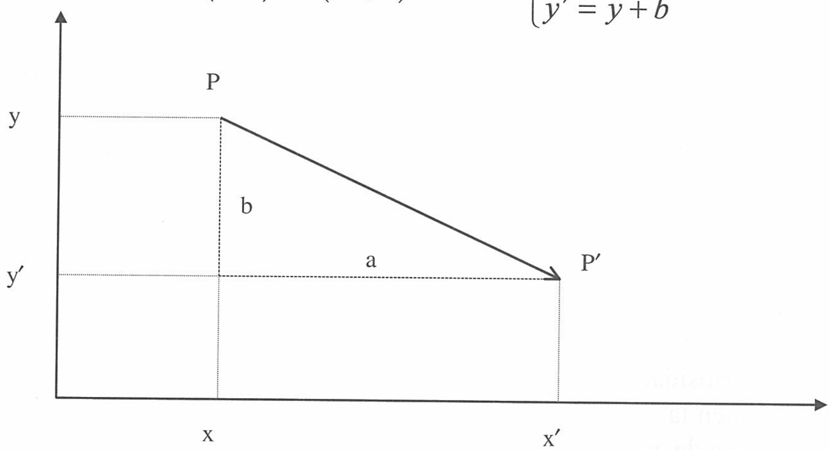
Las traslaciones conservan las distancias mutuas entre los puntos. Las homotecias, en cambio, las dilatan o encogen (según sea $a>1$ o $a<1$) y cambian los sentidos (según sea el signo de a).

Extensión al plano

Consideremos el plano cartesiano intuitivo. Hay dos[1] clases de transformaciones que nos llevan un punto P = (x, y) en otro punto cualquiera P' = (x', y'):

- la **traslación** T = (a, b) determinada por los desplazamientos en cada eje, que conserva las distancias:

$$T\colon (x,y) \mapsto (x',y') \text{ donde } \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$



Esto nos lleva, por analogía con el caso real, a definir la *suma* de puntos poniendo:

$$(x,y) + (a,b) = (x',y')$$

[1] Las primeras conservan las distancias (isométricas) y las segundas los ángulos, esto es, la forma (equiformes).

En este momento se demostrarán (o, al menos, comprobarán) todas las propiedades de la suma (puede usarse la representación gráfica mediante flechas aunque pienso que no se debería usar el término vector en lo posible).

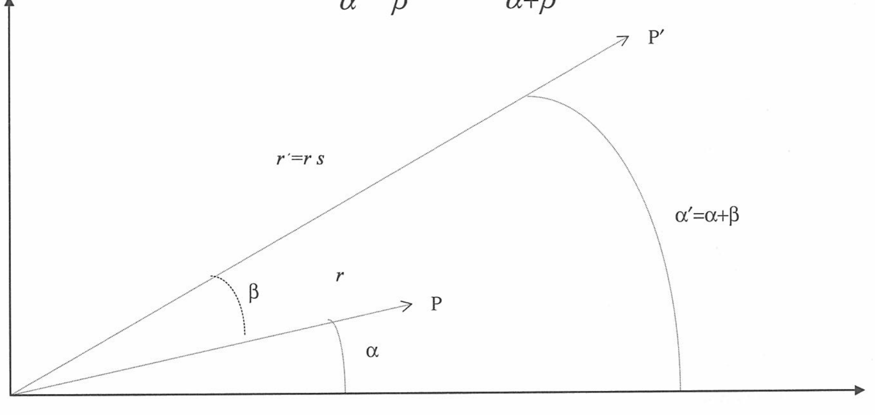
- Con homotecias sólo, no podemos alcanzar todo el plano a partir de un punto P dado, pero sí usando la combinación Q de una **homotecia** (conserva la forma) y un **giro** (conserva las distancias). Si suponemos que $P \neq (0,0)$ y usamos coordenadas polares $P = r_\alpha$ y $P' = r_{\alpha'}$, entonces Q queda determinada por el cociente $s = \dfrac{r'}{r}$ y la diferencia $\beta = \alpha' - \alpha$.

  Resulta que el movimiento Q está determinado por el punto Q = sβ y ello nos lleva a definir el <u>producto</u> de puntos poniendo:

  P.Q=P'

  es decir,

$$r_\alpha . s_\beta = r.s_{\alpha+\beta}$$



La comprobación de las propiedades de estas operaciones es trivial a excepción si cabe, a este nivel, de la propiedad distributiva cuya comprobación nos podemos «saltar» si no se han explicado aún las fórmulas para las razones trigonométricas de la adición de ángulos.

Los números complejos

Los puntos del plano revestidos de la estructura aritmética dada por estas dos operaciones, suma y producto, pasan a denominarse **números complejos**.

Los reales x se identifican con los complejos $(x,0)$; respectivamente en forma polar, identificamos los reales positivos $r > 0$ con los complejos $r_{0°}$ y los negativos $-r$ con los complejos $r_{180°}$.

La regla de los signos

Es inmediato comprobar que el complejo $i = (0,1) = 1_{90°}$ tiene la propiedad de que $i^2 = -1$, lo que significa que la *regla de los signos* de la multiplicación de números reales ya no es válida al pasar a esta clase más amplia de números. Lo cual es lógico, puesto que las propiedades son exigencias que caracterizan a aquellos que las poseen; cuanto más universal es una clase menos propiedades posee.

Por otro lado, muchas operaciones antes intuitivas dejan de serlo temporalmente al ampliar su dominio hasta que la familiaridad con su manejo nos las torna de nuevo intuitivas (piénsese en la extensión de las operaciones de los naturales a los enteros relativos y a los racionales).

La forma binómica

Por último, puesto que:

$$b > 0 \Rightarrow \begin{cases} bi = b_{0^\circ} \times 1_{90^\circ} = b_{90^\circ} = (0,b) \\ -bi = -(0,b) = (0,-b) \end{cases}$$

resulta la forma binómica:

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a + bi$$

tan útil para las manipulaciones aritméticas.

Conclusiones

Como ventajas de este enfoque (el autor lo ha llevado con buenos resultados a la práctica el curso anterior), veo las siguientes :

- se apoya en la intuición del alumno
- es más inteligible para el alumno y va más directo a lo fundamental sin provocar la inseguridad que pueda ocasionar el trabajar de entrada con entidades *imaginarias* que contradigan su intuición
- refuerza el aspecto interdisciplinar y de unidad que tienen las diferentes ramas de las matemáticas
- le obliga a pensar más en vez de a memorizar unas reglas operatorias que no entiende
- permite una mirada, aunque sea de soslayo, a las transformaciones geométricas del plano (importante tema que suele no darse por falta de tiempo)

No veo inconvenientes reseñables a este enfoque, salvo que no es el habitual que se sigue en los textos por la inercia del planteamiento del Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP, Plan 1970) en el que los complejos se veían en 1° de BUP (formas cartesiana y binómica, sin trigonometría) y en 3° de BUP (formas polar y trigonométrica, tras ver la trigonometría).

¿Hasta dónde se debe llegar en la manipulación con números complejos en el Bachillerato? Creo que debemos alcanzar al menos a definir sus operaciones básicas y hasta la fórmula de De Moivre y su inversa que nos proporciona las raíces n-*simas* ($n = 2, 3, 4$). Son muy instructivos los ejercicios de representación geométrica de conjuntos de complejos $z = (x, y) = r\alpha$ determinados por relaciones simples; por ejemplo:

$$-1 < x < 1 \quad (y \text{ arbitrario}); \quad x = y \geq 2; \quad 2 \leq |z| \leq 5; \quad r = 1, \quad 30^\circ < \alpha < 60^\circ$$

Para terminar, si el grupo fuese bueno, se le podría motivar acerca de los tesoros matemáticos que aún quedan por descubrir mostrándole «sin demostrarle» la conocida fórmula de Euler:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\ \text{sen}(\alpha)$$

o enunciándole el teorema fundamental del álgebra

Bibliografía

Markushévich, A. I. (1977): *Curvas maravillosas. Números complejos y representaciones conformes. Funciones maravillosas,* Lecciones populares de Matemáticas, MIR, Moscú.

Eves, H. W. (1969): *Fundamentals of geometry*, Allyn and Bacon, Boston.

Stewart, I. (1995): "Carl Friedrich Gauss", En *Grandes matemáticos,* Temas nº 1 de Investigación y Ciencia, Prensa Científica, Barcelona.

Cástor Molina Iglesias (Las Palmas de Gran Canarias, 1949) es Licenciado en Matemáticas. Ha sido profesor de la Universidad de Santiago y actualmente es Catedrático de Bachillerato en el Instituto Poeta Viana de Santa Cruz de Tenerife. Tiene diversas publicaciones sobre la enseñanza de las matemáticas.

TEXAS INSTRUMENTS

PROGRAMA DE FORMACIÓN:

T^3: Teachers Teaching with Technology: Los cursos pueden ser de 4 horas y de 20 horas.

Grupos de 20 a 30 personas. Docencia gratuita.

Contactar con:

Floreal Gracia Alcaine
Avda. de Valencia, 27 - 5B
12005 Castellón
e-mail: fgracia@mat.uji.es
Teléfono: 964 24 37 91

PROGRAMA DE PRÉSTAMO:

Calculadoras en préstamo:

TI-106, MATH EXPLORER, TI-30X A, TI-36S, TI-80, TI-82, TI-83, TI-85, TI-92, GRAPH-LINK, CBL

Se envían por portes pagados y solamente es necesario realizar la petición con suficiente antelación. Los préstamos tiene una duración de un mes como máximo.

Petición de préstamos:

Tel.: 949 34 80 52 - Fax: 949 26 37 90

PRECIOS ESPECIALES:

Tenemos precios especiales para el profesorado en cualquiera de nuestros distribuidores.

BIBLIOGRAFÍA:

1. "El taller de la TI-92" *B. Kutzler.*
2. "Análisis con las calculadoras TI-XX"
3. "Estadística con las calculadoras TI-XX".
4. "Matrices y Determinantes con la TI-92" *A. Sánchez.*
5. "Distribución de probabilidad" y "Calculadoras gráficas: un reto para resolver ecuaciones"
   F. Gonzáles, F. Gracia, J, Mas.
6. "Cálculo Formal con la TI-92".
7. "Ecuaciones con las calculadoras TI-XX".
8. "CABRI II en el 2º Ciclo de la ESO"
   J.F. Martín.
9. "Fractales con el miniordeandor TI-92"
   N. Rosillo.
10. "Guía didáctica de la calculadora Math Explorer" *M. Redondo y M.T. Sánchez.*
11. "Programas de calculadoras gráficas TI-XX".
12. "Conexión entre naturaleza y matemáticas a través del CBL y la TI-83"
    L. Moya y M. Vasallo.
13. "La Geometría de los mecanismos"
    J. A. Mora.
14. "La TI-83 en la clase: Bachilleratos"
    L. Mas, L. Millán y E. Salinas (en imprenta).

COMPRA DE LIBROS:

Llamando al **91 514 08 90**

También algunos distribuidores venden libros.

Consultar lista de distribuidores en la página web: **www.ti.com/calc/spain**

Texas Instruments España, S.A.
INFORMACIÓN GENERAL

Teléfono de atención general: 91 514 08 90

Pag. web: www.ti.com/calc/spain

Asesoría Pedagógica: Lola Rodríguez Soalleiro. E-mail: x0000ola@dntmail.itg.ti.com

Oficinas centrales:

C/. Musgo, 2, Edificio Europa II. Urb. La Florida. 28023 Madrid.

Tel. (91) 710 29 10 - Fax: (91) 307 68 64